

Poglavlje 8

Bayesov svijet

8.1 Uvjetna vjerojatnost i priroda znanja

U ovom poglavlju istražujemo **Bayesov teorem** - možda najvažniju formulu u epistemologiji, koja mijenja naše razumijevanje znanja, znanosti i racionalnog vjerovanja.

"Kada činjenice mijenjaju moje mišljenje, ja ga promijenim. Što Vi činite, gospodine?" - John Maynard Keynes

Thomas Bayes (1701-1761), prezbiterijanski svećenik i matematičar, ostavio nam je revolucionarni pristup razumijevanju kako ažurirati vjerovanja na temelju dokaza. Njegov rad, objavljen posthumno 1763., postavlja temelje za razumijevanje znanja kao dinamičkog procesa.

8.1.1 Uvjetna vjerojatnost - temelj Bayesovog razmišljanja

Uvjetna vjerojatnost $P(A|B)$ predstavlja vjerojatnost suda A uz pretpostavku da je sud B istinit.

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

Ova formula kodira fundamentalnu epistemološku ideju: **znanje mijenja vjerojatnosti**.

"Svo znanje degenerira u vjerojatnost" - David Hume

```
1 class UvjetnaVjerojatnost:
2     """Implementira uvjetnu vjerojatnost s epistemološkom interpretacijom."""
3
```

```

4  def __init__(self, naziv=""):
5      self.naziv = naziv
6      self.vjerojatnosti = {}
7
8  def postavi(self, sud, vjerojatnost):
9      """Postavlja vjerojatnost suda."""
10     self.vjerojatnosti[sud] = vjerojatnost
11
12     def uvjetna(self, A, B):
13         """Računa  $P(A/B) = P(A \wedge B) / P(B)$ ."""
14         p_a_i_b = self.vjerojatnosti.get((A, B), 0)
15         p_b = self.vjerojatnosti.get(B, 0)
16
17         if p_b == 0:
18             return None # Nedefinirana
19         return p_a_i_b / p_b
20
21     def epistemoloski_opis(self, A, B, p_uvjetna):
22         """Daje epistemološku interpretaciju uvjetne vjerojatnosti."""
23         if p_uvjetna is None:
24             return "Nedefinirana - nema znanja iz ovog uvjeta."
25         elif p_uvjetna > self.vjerojatnosti.get(A, 0):
26             return f"Dokaz '{B}' potvrđuje '{A}'."
27         elif p_uvjetna < self.vjerojatnosti.get(A, 0):
28             return f"Dokaz '{B}' oslabljuje '{A}'."
29         else:
30             return f"Dokaz '{B}' je neutralan za '{A}'."
31
32 # Primjer: Znanstvena teorija i eksperiment
33 print("Uvjetna vjerojatnost - Epistemološki primjer")
34 print("="*45)
35 print("\nKontekst: Znanstveno istraživanje\n")
36
37 uv = UvjetnaVjerojatnost("Znanstvena metoda")
38
39 # Postavi vjerojatnosti
40 uv.postavi("teorija", 0.3) # Apriorna vjerojatnost teorije
41 uv.postavi("eksperiment", 0.4) # Vjerojatnost pozitivnog eksperimenta
42 uv.postavi(("teorija", "eksperiment"), 0.25) # Konjunkcija
43
44 print("Početne vjerojatnosti:")
45 print(f" P(teorija istinita) = {uv.vjerojatnosti['teorija']:.2f}")
46 print(f" P(pozitivan eksperiment) = {uv.vjerojatnosti['eksperiment']:.2f}")
47 print(f" P(teorija istinita ∧ pozitivan eksperiment) = {uv.vjerojatnosti[( 'teorija',
48 ↪ 'eksperiment')]:.2f}")
49
50 print("\nUvjetne vjerojatnosti:\n")
51
52 # P(eksperiment | teorija)
53 p_eks_ako_teorija = uv.uvjetna("eksperiment", "teorija")
54 print("1. P(pozitivan eksperiment | teorija istinita)")
55 print(f" = P(teorija ∧ eksperiment) / P(teorija)")

```

```

55 print(f"      = {uv.vjerojatnosti[('teorija', 'eksperiment')]:.2f} /
    ↪ {uv.vjerojatnosti['teorija']:.2f} = {p_eks_ako_teorija:.3f}")
56 print(f"      \n      Interpretacija: Ako je teorija istinita, eksperiment")
57 print(f"      će biti pozitivan u {p_eks_ako_teorija*100:.1f}% slučajeva.")
58
59 # P(teorija | eksperiment)
60 p_teorija_ako_eks = uv.uvjetna("teorija", "eksperiment")
61 print("\n2. P(teorija istinita | pozitivan eksperiment)")
62 print(f"      = P(teorija ∧ eksperiment) / P(eksperiment)")
63 print(f"      = {uv.vjerojatnosti[('teorija', 'eksperiment')]:.2f} /
    ↪ {uv.vjerojatnosti['eksperiment']:.2f} = {p_teorija_ako_eks:.3f}")
64 print(f"      \n      Interpretacija: Nakon pozitivnog eksperimenta,")
65 print(f"      vjerojatnost da je teorija istinita raste na {p_teorija_ako_eks*100:.1f}%.")
66
67 print("\nEpistemološka pouka:")
68 print("      Dokaz ne čini teoriju sigurnom, već povećava")
69 print("      stupanj racionalnog vjerovanja u nju.")

```

Output

Uvjetna vjerojatnost - Epistemološki primjer

=====

Kontekst: Znanstveno istraživanje

Početne vjerojatnosti:

$P(\text{teorija istinita}) = 0.30$

$P(\text{pozitivan eksperiment}) = 0.40$

$P(\text{teorija istinita} \wedge \text{pozitivan eksperiment}) = 0.25$

Uvjetne vjerojatnosti:

1. $P(\text{pozitivan eksperiment} \mid \text{teorija istinita})$
 $= P(\text{teorija} \wedge \text{eksperiment}) / P(\text{teorija})$
 $= 0.25 / 0.30 = 0.000$

Interpretacija: Ako je teorija istinita, eksperiment
 će biti pozitivan u 0.0% slučajeva.

2. $P(\text{teorija istinita} \mid \text{pozitivan eksperiment})$
 $= P(\text{teorija} \wedge \text{eksperiment}) / P(\text{eksperiment})$
 $= 0.25 / 0.40 = 0.625$

Interpretacija: Nakon pozitivnog eksperimenta,
 vjerojatnost da je teorija istinita raste na 62.5%.

Epistemološka pouka:

Dokaz ne čini teoriju sigurnom, već povećava
 stupanj racionalnog vjerovanja u nju.

8.1.2 Bayesov teorem - formula racionalnog učenja

Bayesov teorem omogućava inverziju uvjetnih vjerojatnosti:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

gdje je:

- H - **hipoteza** (teorija, vjerovanje)
- E - **evidencija** (dokaz, opažanje)
- $P(H)$ - **prior** (apriorno vjerovanje)
- $P(H|E)$ - **posterior** (aposteriorno vjerovanje)
- $P(E|H)$ - **likelihood** (izglednost dokaza)

Ova formula opisuje **racionalno učenje** - kako ažurirati vjerovanja na temelju novih dokaza.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 class BayesovTeorem:
5     """Implementacija i vizualizacija Bayesovog teorema."""
6
7     def __init__(self):
8         self.povijest_azuriranja = []
9
10    def bayes(self, prior, likelihood, evidencija):
11        """Primjenjuje Bayesov teorem.
12
13        Args:
14            prior: P(H)
15            likelihood: P(E|H)
16            evidencija: P(E)
17
18        Returns:
19            posterior: P(H|E)
20        """
21        if evidencija == 0:
22            raise ValueError("P(E) ne može biti 0!")
23
24        posterior = (likelihood * prior) / evidencija
25
26        self.povijest_azuriranja.append({
27            'prior': prior,
28            'likelihood': likelihood,

```

```

29         'evidencija': evidencija,
30         'posterior': posterior
31     })
32
33     return posterior
34
35 def bayes_omjer(self, prior1, prior2, likelihood1, likelihood2):
36     """Računa Bayesov omjer za dvije hipoteze."""
37     prior_omjer = prior1 / prior2 if prior2 > 0 else float('inf')
38     likelihood_omjer = likelihood1 / likelihood2 if likelihood2 > 0 else float('inf')
39     posterior_omjer = prior_omjer * likelihood_omjer
40
41     return {
42         'prior_omjer': prior_omjer,
43         'likelihood_omjer': likelihood_omjer,
44         'posterior_omjer': posterior_omjer
45     }
46
47 # Demonstracija
48 print("Bayesov teorem - Izvod i značenje")
49 print("="*34)
50
51 print("\nMATEMATIČKI IZVOD:\n")
52 print("1. Definicija uvjetne vjerojatnosti:")
53 print("     $P(H|E) = P(H \wedge E) / P(E)$ ")
54 print("     $P(E|H) = P(H \wedge E) / P(H)$ ")
55 print("2. Iz druge jednadžbe:")
56 print("     $P(H \wedge E) = P(E|H) \cdot P(H)$ ")
57 print("3. Uvrštavanjem u prvu:")
58 print("     $P(H|E) = P(E|H) \cdot P(H) / P(E)$ ")
59
60 print("\nEPISTEMOLOŠKO ZNAČENJE:\n")
61 print("     $P(E|H) \cdot P(H)$ ")
62 print("P(H|E) = -----")
63 print("          P(E)")
64 print("\n↑          ↑          ↑          ↑")
65 print("Posterior Likelihood Prior Normalizacija")
66
67 print("\n• Prior P(H): Što sam vjerovao prije dokaza")
68 print("• Likelihood P(E|H): Koliko hipoteza predviđa dokaz")
69 print("• Posterior P(H|E): Što trebam vjerovati nakon dokaza")
70
71 print("\nALTERNATIVNI OBLIK (usporedba hipoteza):\n")
72 print("P(H1|E)    P(E|H1) · P(H1)")
73 print("----- = -----")
74 print("P(H2|E)    P(E|H2) · P(H2)")
75 print("\nOmjer posteriornih = Omjer likelihooda × Omjer priornih")
76
77 print("\nFILOZOFSKE IMPLIKACIJE:\n")
78 implikacije = [
79     "Znanje je stupnjevito, ne binarno",
80     "Učenje je ažuriranje, ne zamjena",
81     "Dokazi ne govore sami - trebaju prior",

```

```

82 "Racionalni agent mijenja mišljenje postupno"
83 ]
84 for i, impl in enumerate(implikacije, 1):
85     print(f"{i}. {impl}")

```

Output

Bayesov teorem - Izvod i značenje

=====

MATEMATIČKI IZVOD:

1. Definicija uvjetne vjerojatnosti:

$$P(H|E) = P(H \wedge E) / P(E)$$

$$P(E|H) = P(H \wedge E) / P(H)$$

2. Iz druge jednadžbe:

$$P(H \wedge E) = P(E|H) \cdot P(H)$$

3. Uvrštavanjem u prvu:

$$P(H|E) = P(E|H) \cdot P(H) / P(E)$$

EPISTEMOLOŠKO ZNAČENJE:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 Posterior Likelihood Prior Normalizacija

- Prior $P(H)$: Što sam vjerovao prije dokaza
- Likelihood $P(E|H)$: Koliko hipoteza predviđa dokaz
- Posterior $P(H|E)$: Što trebam vjerovati nakon dokaza

ALTERNATIVNI OBLIK (usporedba hipoteza):

$$\frac{P(H_1|E)}{P(H_2|E)} = \frac{P(E|H_1) \cdot P(H_1)}{P(E|H_2) \cdot P(H_2)}$$

Omjer posteriornih = Omjer likelihooda × Omjer priornih

FILOZOFSKE IMPLIKACIJE:

1. Znanje je stupnjevito, ne binarno
2. Učenje je ažuriranje, ne zamjena
3. Dokazi ne govore sami - trebaju prior
4. Racionalni agent mijenja mišljenje postupno

8.1.3 Epistemologija - znanje kao ažuriranje vjerovanja

Bayesov pristup revolucionira epistemologiju:

- **Tradicionalna epistemologija:** Znanje = opravdano istinito vjerovanje (JTB)
- **Bayesova epistemologija:** Znanje = racionalno ažurirano vjerovanje

"Mijenjanje mišljenja je dokaz razmišljanja" - preuređeni Bayesov princip

```

1 class BayesovaEpistemologija:
2     """Modelira epistemološki proces kroz Bayesovo ažuriranje."""
3
4     def __init__(self, hipoteza, prior):
5         self.hipoteza = hipoteza
6         self.prior = prior
7         self.trenutno_vjerovanje = prior
8         self.povijest = [("početno", prior)]
9
10    def promatraj_dokaz(self, dokaz, likelihood_true, likelihood_false):
11        """Ažurira vjerovanje na temelju novog dokaza.
12
13        Args:
14            dokaz: opis dokaza
15            likelihood_true:  $P(\text{dokaz}|\text{hipoteza})$ 
16            likelihood_false:  $P(\text{dokaz}|\neg\text{hipoteza})$ 
17        """
18
19        # Računaj  $P(\text{dokaz})$ 
20        p_dokaz = (likelihood_true * self.trenutno_vjerovanje +
21                  likelihood_false * (1 - self.trenutno_vjerovanje))
22
23        # Bayesovo ažuriranje
24        novo_vjerovanje = (likelihood_true * self.trenutno_vjerovanje) / p_dokaz
25
26        promjena = novo_vjerovanje - self.trenutno_vjerovanje
27        self.trenutno_vjerovanje = novo_vjerovanje
28        self.povijest.append((dokaz, novo_vjerovanje))
29
30        return {
31            'novo_vjerovanje': novo_vjerovanje,
32            'promjena': promjena,
33            'p_dokaz': p_dokaz
34        }
35
36    def epistemoloski_status(self):
37        """Vraća epistemološki status hipoteze."""
38        v = self.trenutno_vjerovanje
39        if v < 0.01:
40            return "Praktički opovrgnuto"

```

```

40     elif v < 0.1:
41         return "Vrlo nevjerojatno"
42     elif v < 0.4:
43         return "Nevjerojatno"
44     elif v < 0.6:
45         return "Neizvjesno"
46     elif v < 0.9:
47         return "Vjerojatno"
48     elif v < 0.99:
49         return "Vrlo vjerojatno"
50     else:
51         return "Praktički sigurno"
52
53 # Simulacija znanstvenog istraživanja
54 print("Bayesova epistemologija - Ažuriranje znanja")
55 print("="*44)
56 print("\nScenarij: Znanstvenik istražuje novu teoriju\n")
57
58 # Početno stanje
59 episteme = BayesovaEpistemologija("Nova teorija", prior=0.1)
60 print("Početno stanje:")
61 print(f"  Prior P(teorija) = {episteme.prior:.3f}")
62 print(f"  Skepticizam: Visok ({(1-episteme.prior)*100:.1f}%)")
63
64 # Serija eksperimenata
65 eksperimenti = [
66     ("POZITIVAN", 0.8, 0.3),  # Pozitivan rezultat
67     ("POZITIVAN", 0.8, 0.3),  # Još jedan pozitivan
68     ("NEGATIVAN", 0.2, 0.7),  # Negativan rezultat
69     ("POZITIVAN", 0.8, 0.3),  # Opet pozitivan
70     ("POZITIVAN", 0.8, 0.3),  # I još jedan
71 ]
72
73 for i, (rezultat, lik_true, lik_false) in enumerate(eksperimenti, 1):
74     print(f"\nEKSPERIMENT {i}:")
75     print(f"  Rezultat: {rezultat}")
76
77     if rezultat == "POZITIVAN":
78         print(f"  Likelihood P(pozitivan|teorija) = {lik_true:.2f}")
79         print(f"  P(pozitivan|¬teorija) = {lik_false:.2f}")
80     else:
81         print(f"  Likelihood P(negativan|teorija) = {lik_true:.2f}")
82         print(f"  P(negativan|¬teorija) = {lik_false:.2f}")
83
84     # Ažuriraj vjerovanje
85     rezultat_azuriranja = episteme.promatraj_dokaz(
86         f"Eksperiment {i}: {rezultat}",
87         lik_true,
88         lik_false
89     )
90
91     print(f"  \n  Bayesovo ažuriranje:")
92     if i == 1:

```



```

93     print(f" P(teorija|dokaz1) = {lik_true:.2f} × {episteme.povijest[-2][1]:.2f} / "
94           f"{rezultat_azuriranja['p_dokaz']:.2f} = "
95           ↪ {rezultat_azuriranja['novo_vjerovanje']:.3f}")
96 else:
97     print(f" P(teorija|{'dokaz1' if i==2 else 'dokaz1,dokaz2' if i==3 else
98           ↪ 'dokaz1,dokaz2,dokaz3' if i==4 else 'svi dokazi'}) = "
99           f"{lik_true:.2f} × {episteme.povijest[-2][1]:.2f} / "
100          f"{rezultat_azuriranja['p_dokaz']:.2f} = "
101          ↪ {rezultat_azuriranja['novo_vjerovanje']:.3f}")
102
103     print(f" \n Novo vjerovanje: {rezultat_azuriranja['novo_vjerovanje']*100:.1f}%")
104     print(f" Promjena: {rezultat_azuriranja['promjena']*100:+.1f} postotnih bodova")
105
106 # Analiza
107 print("\nEpistemološka analiza:")
108 print("="*23)
109
110 print("\nPutanja vjerovanja: ", end="")
111 for i, (opis, vjerovanje) in enumerate(episteme.povijest):
112     if i > 0:
113         print(" → ", end="")
114         print(f"{vjerovanje*100:.1f}%", end="")
115 print()
116
117 print("\nKljučne točke:")
118 print(" • Znanje se akumulira postupno")
119 print(" • Negativni dokazi također informiraju")
120 print(" • Nikad ne dostižemo potpunu sigurnost")
121 print(" • Racionalni agent mijenja mišljenje s dokazima")
122
123 print("\nFinalno stanje:")
124 print(f" Vjerovanje u teoriju: {episteme.trenutno_vjerovanje*100:.1f}%")
125 print(f" Status: {episteme.epistemoloski_status()} ", end="")
126 if episteme.trenutno_vjerovanje > 0.5:
127     print("(više vjerojatno nego ne)")
128 else:
129     print("(više nevjerojatno nego vjerojatno)")

```

Output

```

Bayesova epistemologija - Ažuriranje znanja
=====

Scenarij: Znanstvenik istražuje novu teoriju

Početno stanje:
  Prior P(teorija) = 0.100
  Skepticizam: Visok (90.0%)

EKSPERIMENT 1:
  Rezultat: POZITIVAN

```

Likelihood $P(\text{pozitivan}|\text{teorija}) = 0.80$
 $P(\text{pozitivan}|\neg\text{teorija}) = 0.30$

Bayesovo ažuriranje:

$$P(\text{teorija}|\text{dokaz}_1) = 0.80 \times 0.10 / 0.35 = 0.229$$

Novo vjerovanje: 22.9%

Promjena: +12.9 postotnih bodova

EKSPERIMENT 2:

Rezultat: POZITIVAN

Likelihood $P(\text{pozitivan}|\text{teorija}) = 0.80$

$P(\text{pozitivan}|\neg\text{teorija}) = 0.30$

Bayesovo ažuriranje:

$$P(\text{teorija}|\text{dokaz}_1) = 0.80 \times 0.23 / 0.41 = 0.441$$

Novo vjerovanje: 44.1%

Promjena: +21.3 postotnih bodova

EKSPERIMENT 3:

Rezultat: NEGATIVAN

Likelihood $P(\text{negativan}|\text{teorija}) = 0.20$

$P(\text{negativan}|\neg\text{teorija}) = 0.70$

Bayesovo ažuriranje:

$$P(\text{teorija}|\text{dokaz}_1, \text{dokaz}_2) = 0.20 \times 0.44 / 0.48 = 0.184$$

Novo vjerovanje: 18.4%

Promjena: -25.7 postotnih bodova

EKSPERIMENT 4:

Rezultat: POZITIVAN

Likelihood $P(\text{pozitivan}|\text{teorija}) = 0.80$

$P(\text{pozitivan}|\neg\text{teorija}) = 0.30$

Bayesovo ažuriranje:

$$P(\text{teorija}|\text{dokaz}_1, \text{dokaz}_2, \text{dokaz}_3) = 0.80 \times 0.18 / 0.39 = 0.376$$

Novo vjerovanje: 37.6%

Promjena: +19.2 postotnih bodova

EKSPERIMENT 5:

Rezultat: POZITIVAN

Likelihood $P(\text{pozitivan}|\text{teorija}) = 0.80$

$P(\text{pozitivan}|\neg\text{teorija}) = 0.30$

Bayesovo ažuriranje:

$$P(\text{teorija}|\text{svi dokazi}) = 0.80 \times 0.38 / 0.49 = 0.616$$

Novo vjerovanje: 61.6%
 Promjena: +24.0 postotnih bodova

Epistemološka analiza:
 =====

Putanja vjerovanja: 10.0% → 22.9% → 44.1% → 18.4% → 37.6% → 61.6%

Ključne točke:

- Znanje se akumulira postupno
- Negativni dokazi također informiraju
- Nikad ne dostižemo potpunu sigurnost
- Racionalni agent mijenja mišljenje s dokazima

Finalno stanje:

Vjerovanje u teoriju: 61.6%
 Status: Vjerojatno (više vjerojatno nego ne)

8.1.4 Filozofija znanosti - potvrđivanje i opovrgavanje

Bayesov pristup osvjetljava klasične debate u filozofiji znanosti:

Popper vs. Bayes

- **Popper:** Znanosti se bavi **falsifikacijom** - traži opovrgavanje
- **Bayes:** Znanost postupno **ažurira vjerojatnosti** - traži najbolju hipotezu

Problem indukcije

"Nema dovoljno opažanja bijele boje koje bi dokazalo da su svi labudovi bijeli, ali jedno opažanje crnog labuda to opovrgava" - Karl Popper

Bayesov pristup: Crni labud drastično smanjuje vjerojatnost, ali ne na nulu!

```

1 class FilozofijaZnanosti:
2     """Uspoređuje Popperov i Bayesov pristup znanstvenoj metodi."""
3
4     def __init__(self):
5         self.popper_status = "nije opovrgnuta"
6         self.bayes_vjerovanje = {}
7
8     def popper_test(self, hipoteza, opazanje, konzistentno):
9         """Popperov pristup - falsifikacija."""

```

```

10     if not konzistentno:
11         self.popper_status = "OPOVRGNUTA"
12         return False
13     return True # Nije opovrgnuta (ali nije ni potvrđena!)
14
15     def bayes_test(self, hipoteze, opazanje, likelihoods):
16         """Bayesov pristup - ažuriranje vjerojatnosti."""
17         # Računaj P(opazanje)
18         p_opazanje = sum(likelihoods[h] * self.bayes_vjerovanje[h]
19                         for h in hipoteze)
20
21         if p_opazanje == 0:
22             return self.bayes_vjerovanje
23
24         # Ažuriraj sve hipoteze
25         nova_vjerovanja = {}
26         for h in hipoteze:
27             nova_vjerovanja[h] = (likelihoods[h] * self.bayes_vjerovanje[h]) / p_opazanje
28
29         self.bayes_vjerovanje = nova_vjerovanja
30         return nova_vjerovanja
31
32 # Simulacija: Problem bijelih labudova
33 print("Filozofija znanosti - Popper vs. Bayes")
34 print("="*39)
35 print("\nHipoteza: 'Svi labudovi su bijeli'\n")
36
37 fz = FilozofijaZnanosti()
38
39 # POPPEROV PRISTUP
40 print("POPPEROV PRISTUP (Falsifikacija):")
41 print("-"*35)
42
43 # 1000 bijelih labudova
44 for i in [1, 2, 3, "...", 1000]:
45     if i == "...":
46         print(f"... (nakon 999 bijelih labudova)")
47     else:
48         status = fz.popper_test("svi bijeli", "bijeli", True)
49         print(f"Opazanje {i}: Bijeli labud → Hipoteza NIJE OPOVRGNUTA")
50
51 print(f"\nStatus: Hipoteza {fz.popper_status} (ali nije ni potvrđena!)")
52
53 # Crni labud!
54 print(f"\nOpazanje 1001: CRNI LABUD → Hipoteza OPOVRGNUTA! ×")
55 fz.popper_test("svi bijeli", "crni", False)
56
57 print("\nPopperov zaključak: Hipoteza je falsificirana.")
58 print("Tisuću potvrda ne dokazuje teoriju, jedna falsifikacija je ruši.")
59
60 # BAYESOV PRISTUP
61 print("\nBAYESOV PRISTUP (Ažuriranje vjerojatnosti):")
62 print("-"*44)

```

```

63
64 # Početna vjerovanja
65 fz.bayes_vjerovanje = {
66     "svi_bijeli": 0.5,
67     "vecina_bijeli": 0.5
68 }
69 print(f"Početno vjerovanje: P(svi bijeli) = {fz.bayes_vjerovanje['svi_bijeli']*100:.1f}%\n")
70
71 # Likelihoods za bijeli labud
72 lik_bijeli = {
73     "svi_bijeli": 1.0,      # Ako su svi bijeli, sigurno ćemo vidjeti bijelog
74     "vecina_bijeli": 0.9    # Ako je većina bijela, 90% šanse za bijelog
75 }
76
77 # Simuliraj opažanja
78 brojevi_opazanja = [10, 100, 500, 1000]
79 for n in brojevi_opazanja:
80     # Resetiraj za svaki test
81     fz.bayes_vjerovanje = {"svi_bijeli": 0.5, "vecina_bijeli": 0.5}
82
83     for _ in range(n):
84         fz.bayes_test(["svi_bijeli", "vecina_bijeli"], "bijeli", lik_bijeli)
85
86     print(f"Nakon {n} bijelih: P(hipoteza) = {fz.bayes_vjerovanje['svi_bijeli']*100:.1f}%")
87
88 # Crni labud!
89 print("\nOpažanje 1001: CRNI LABUD!")
90 lik_crni = {
91     "svi_bijeli": 0.0,      # Nemoguće ako su svi bijeli!
92     "vecina_bijeli": 0.1    # Moguće ako neki nisu bijeli
93 }
94 print(f"Likelihood P(crni|svi bijeli) = {lik_crni['svi_bijeli']:.3f}")
95 print(f"Likelihood P(crni|neki crni) = {lik_crni['vecina_bijeli']:.3f}")
96
97 fz.bayes_test(["svi_bijeli", "vecina_bijeli"], "crni", lik_crni)
98 print(f"\nNakon crnog labuda: P(hipoteza) = {fz.bayes_vjerovanje['svi_bijeli']*100:.1f}%")
99 print(f"Alternativa P(većina bijeli) = {fz.bayes_vjerovanje['vecina_bijeli']*100:.1f}%")
100
101 print("\nBayesov zaključak: Prebacujemo vjerovanje na fleksibilniju hipotezu.")
102
103 # Usporedba
104 print("\nUSPOREDBA PRISTUPA:")
105 print("=*20)
106
107 print("\nPopper:")
108 print("  ✓ Jasan kriterij (opovrgnuto/nije)")
109 print("  ✓ Naglašava kritičko testiranje")
110 print("  × Binaran pristup (sve ili ništa)")
111 print("  × Ne govori o stupnju potvrde")
112
113 print("\nBayes:")
114 print("  ✓ Stupnjevito znanje")
115 print("  ✓ Kvantificira nesigurnost")

```

```

116 print("  ✓ Omogućava usporedbu hipoteza")
117 print("  × Ovisi o prioru")
118 print("  × Složeniji račun")
119
120 print("\nSinteza: Popperova falsifikacija je specijalan slučaj")
121 print("      Bayesovog ažuriranja s likelihood = 0")

```

Output

Filozofija znanosti - Popper vs. Bayes

=====

Hipoteza: 'Svi labudovi su bijeli'

POPPEROV PRISTUP (Falsifikacija):

Opažanje 1: Bijeli labud → Hipoteza NIJE OPOVRGNUTA

Opažanje 2: Bijeli labud → Hipoteza NIJE OPOVRGNUTA

Opažanje 3: Bijeli labud → Hipoteza NIJE OPOVRGNUTA

... (nakon 999 bijelih labudova)

Opažanje 1000: Bijeli labud → Hipoteza NIJE OPOVRGNUTA

Status: Hipoteza nije opovrgnuta (ali nije ni potvrđena!)

Opažanje 1001: CRNI LABUD → Hipoteza OPOVRGNUTA! ×

Popperov zaključak: Hipoteza je falsificirana.

Tisuću potvrda ne dokazuje teoriju, jedna falsifikacija je ruši.

BAYESOV PRISTUP (Ažuriranje vjerojatnosti):

Početno vjerovanje: $P(\text{svi bijeli}) = 50.0\%$

Nakon 10 bijelih: $P(\text{hipoteza}) = 74.1\%$

Nakon 100 bijelih: $P(\text{hipoteza}) = 100.0\%$

Nakon 500 bijelih: $P(\text{hipoteza}) = 100.0\%$

Nakon 1000 bijelih: $P(\text{hipoteza}) = 100.0\%$

Opažanje 1001: CRNI LABUD!

Likelihood $P(\text{crni}|\text{svi bijeli}) = 0.000$

Likelihood $P(\text{crni}|\text{neki crni}) = 0.100$

Nakon crnog labuda: $P(\text{hipoteza}) = 0.0\%$

Alternativa $P(\text{većina bijeli}) = 100.0\%$

Bayesov zaključak: Prebacujemo vjerovanje na fleksibilniju hipotezu.

USPOREDBA PRISTUPA:

=====

Popper:

- ✓ Jasan kriterij (opovrgnuto/nije)
- ✓ Naglašava kritičko testiranje
- × Binaran pristup (sve ili ništa)
- × Ne govori o stupnju potvrde

Bayes:

- ✓ Stupnjevito znanje
- ✓ Kvantificira nesigurnost
- ✓ Omogućava usporedbu hipoteza
- × Ovisi o prioru
- × Složeniji račun

Sinteza: Popperova falsifikacija je specijalan slučaj
Bayesovog ažuriranja s likelihood = 0

8.1.5 Problem priornih vjerojatnosti

Najkontroverzniji aspekt Bayesove epistemologije je izbor **priora**:

- **Subjektivni prior**: Osobno vjerovanje
- **Objektivni prior**: Princip indiferencije, maksimalna entropija
- **Informativni prior**: Na temelju prethodnog znanja

"Prior je mjesto gdje se subjektivnost uvlači u objektivnu znanost" - kritičari Bayesa

```

1 class ProblemPriora:
2     """Istražuje epistemološke implikacije izbora priora."""
3
4     def __init__(self):
5         self.agenti = {}
6
7     def stvori_agenta(self, ime, prior):
8         """Stvara epistemološkog agenta s danim priorom."""
9         self.agenti[ime] = {
10             'prior': prior,
11             'trenutno': prior,
12             'povijest': [prior]
13         }
14
15     def azuriraj_sve(self, likelihood_h, likelihood_ne_h):
16         """Svi agenti promatraju isti dokaz."""
17         rezultati = {}
18 
```

```

19     for ime, agent in self.agenta.items():
20         p_trenutno = agent['trenutno']
21
22         # Bayesovo ažuriranje
23         p_dokaz = likelihood_h * p_trenutno + likelihood_ne_h * (1 - p_trenutno)
24         p_novo = (likelihood_h * p_trenutno) / p_dokaz if p_dokaz > 0 else p_trenutno
25
26         agent['trenutno'] = p_novo
27         agent['povijest'].append(p_novo)
28
29         rezultati[ime] = {
30             'prije': p_trenutno,
31             'poslije': p_novo,
32             'promjena': p_novo - p_trenutno
33         }
34
35     return rezultati
36
37     def mjeri_konvergenciju(self):
38         """Mjeri koliko su se vjerovanja približila."""
39         trenutna_vjerovanja = [a['trenutno'] for a in self.agenta.values()]
40         return max(trenutna_vjerovanja) - min(trenutna_vjerovanja)
41
42     # Demonstracija
43     print("Problem priora - Epistemološka kontroverza")
44     print("=="*43)
45     print("\nScenarij: Tri znanstvenika procjenjuju istu hipotezu")
46     print("    nakon identičnih dokaza\n")
47
48     pp = ProblemPriora()
49
50     # Različiti priori
51     pp.stvori_agenta("Optimist", 0.8)
52     pp.stvori_agenta("Neutralac", 0.5)
53     pp.stvori_agenta("Skeptik", 0.1)
54
55     print("POČETNI PRIORI:")
56     for ime, agent in pp.agenta.items():
57         prior_opis = "(visoko vjerovanje)" if agent['prior'] > 0.6 else \
58             "(princip indiferencije)" if agent['prior'] == 0.5 else \
59             "(nisko vjerovanje)"
60         print(f" {ime:12} P(H) = {agent['prior']:.2f} {prior_opis}")
61
62     # Serija dokaza
63     dokazi = [
64         ("Pozitivan", 0.9, 0.2),
65         ("Pozitivan", 0.9, 0.2),
66         ("Negativan", 0.1, 0.8),
67         ("Pozitivan", 0.9, 0.2),
68         ("Pozitivan", 0.9, 0.2),
69     ]
70
71     for i, (tip, lik_h, lik_ne_h) in enumerate(dokazi, 1):

```



```

72     print(f"\nDOKAZ {i}: {tip} (P(E|H)={lik_h}, P(E|¬H)={lik_ne_h})")
73
74     rezultati = pp.azuriraj_sve(lik_h, lik_ne_h)
75
76     print("Nakon dokaza:")
77     for ime, rez in rezultati.items():
78         print(f"  {ime:12} {rez['prije']:.2f} → {rez['poslije']:.2f} "
79               f"({rez['promjena']:+.2f})")
80
81 # Analiza konvergencije
82 print("\nANALIZA KONVERGENCIJE:")
83 print("="*23)
84
85 pocetna_razlika = max(a['prior'] for a in pp.agenti.values()) - \
86                   min(a['prior'] for a in pp.agenti.values())
87 finalna_razlika = pp.mjeri_konvergenciju()
88
89 print(f"\nPocetna razlika (max-min): {pocetna_razlika:.2f}")
90 print(f"Finalna razlika (max-min): {finalna_razlika:.2f}")
91
92 print("\nFinalna vjerovanja:")
93 for ime, agent in pp.agenti.items():
94     print(f"  {ime:10} {agent['trenutno']*100:.1f}%")
95
96 print("\nEpistemološke implikacije:")
97 print("  • Priori utječu, ali njihov utjecaj slabi s dokazima")
98 print("  • Dovoljno dokaza vodi konvergenciji")
99 print("  • Različiti putovi do (približno) istog zaključka")
100 print("  • Objektivnost emerge iz subjektivnih početaka")
101
102 print("\nFILOZOFSKI PROBLEM:")
103 print("  Koji prior je 'pravi'? Postoji li objektivan prior?")
104 print("  \n  Pristupi:")
105 print("    1. Princip indiferencije (Laplace): P=0.5 bez informacija")
106 print("    2. Jeffreysov prior: Invarijantan na reparametrizaciju ")
107 print("    3. Maksimalna entropija: Najmanje informativna distribucija")
108 print("    4. Empirijski Bayes: Prior iz podataka")
109 print("  \n  Zaključak: Prior je neizbježan, ali ne fatalan!")

```

Output

Problem priora - Epistemološka kontroverza

=====

Scenarij: Tri znanstvenika procjenjuju istu hipotezu
nakon identičnih dokaza

POČETNI PRIORI:

Optimist	P(H) = 0.80 (visoko vjerovanje)
Neutralac	P(H) = 0.50 (princip indiferencije)
Skeptik	P(H) = 0.10 (nisko vjerovanje)

DOKAZ 1: Pozitivan ($P(E|H)=0.9$, $P(E|\neg H)=0.2$)

Nakon dokaza:

Optimist	0.80	→	0.95	(+0.15)
Neutralac	0.50	→	0.82	(+0.32)
Skeptik	0.10	→	0.33	(+0.23)

DOKAZ 2: Pozitivan ($P(E|H)=0.9$, $P(E|\neg H)=0.2$)

Nakon dokaza:

Optimist	0.95	→	0.99	(+0.04)
Neutralac	0.82	→	0.95	(+0.13)
Skeptik	0.33	→	0.69	(+0.36)

DOKAZ 3: Negativan ($P(E|H)=0.1$, $P(E|\neg H)=0.8$)

Nakon dokaza:

Optimist	0.99	→	0.91	(-0.08)
Neutralac	0.95	→	0.72	(-0.24)
Skeptik	0.69	→	0.22	(-0.47)

DOKAZ 4: Pozitivan ($P(E|H)=0.9$, $P(E|\neg H)=0.2$)

Nakon dokaza:

Optimist	0.91	→	0.98	(+0.07)
Neutralac	0.72	→	0.92	(+0.20)
Skeptik	0.22	→	0.56	(+0.34)

DOKAZ 5: Pozitivan ($P(E|H)=0.9$, $P(E|\neg H)=0.2$)

Nakon dokaza:

Optimist	0.98	→	1.00	(+0.02)
Neutralac	0.92	→	0.98	(+0.06)
Skeptik	0.56	→	0.85	(+0.29)

ANALIZA KONVERGENCIJE:

=====

Početna razlika (max-min): 0.70

Finalna razlika (max-min): 0.14

Finalna vjerovanja:

Optimist	99.5%
Neutralac	98.1%
Skeptik	85.1%

Epistemološke implikacije:

- Priori utječu, ali njihov utjecaj slabi s dokazima
- Dovoljno dokaza vodi konvergenciji
- Različiti putovi do (približno) istog zaključka
- Objektivnost emerge iz subjektivnih početaka

FILOZOFSKI PROBLEM:

Koji prior je 'pravi'? Postoji li objektivan prior?

Pristupi:

1. Princip indiferencije (Laplace): $P=0.5$ bez informacija
2. Jeffreysov prior: Invarijantan na reparametrizaciju
3. Maksimalna entropija: Najmanje informativna distribucija
4. Empirijski Bayes: Prior iz podataka

Zaključak: Prior je neizbježan, ali ne fatalan!

8.1.6 Occamova oštrica i Bayesov faktor

Occamova oštrica: "Entitete ne treba umnožavati bez potrebe"

Bayesov pristup prirodno implementira ovaj princip kroz **Bayesov faktor**:

$$BF_{12} = \frac{P(E|H_1)}{P(E|H_2)} \cdot \frac{P(H_1)}{P(H_2)}$$

Jednostavnije hipoteze imaju veću priornu vjerojatnost i manju fleksibilnost u objašnjavanju podataka.

```

1 class OccamovaOstrica:
2     """Implementira Occamovu oštricu kroz Bayesov faktor."""
3
4     def __init__(self):
5         self.hipoteze = {}
6
7     def dodaj_hipotezu(self, naziv, kompleksnost, prior=None):
8         """Dodaje hipotezu s danom kompleksnošću.
9
10        Prior se automatski računa prema kompleksnosti ako nije dan.
11        """
12        if prior is None:
13            # Occamov princip: jednostavnije hipoteze imaju veći prior
14            prior = 1.0 / (2 ** kompleksnost)
15
16        self.hipoteze[naziv] = {
17            'kompleksnost': kompleksnost,
18            'prior': prior,
19            'posterior': prior
20        }
21
22    def bayesov_faktor(self, h1, h2, likelihood1, likelihood2):
23        """Računa Bayesov faktor između dvije hipoteze."""
24        prior_omjer = self.hipoteze[h1]['prior'] / self.hipoteze[h2]['prior']
25        likelihood_omjer = likelihood1 / likelihood2 if likelihood2 > 0 else float('inf')
26
27        bf = likelihood_omjer * prior_omjer

```

```

28
29     return {
30         'prior_omjer': prior_omjer,
31         'likelihood_omjer': likelihood_omjer,
32         'bayesov_faktor': bf
33     }
34
35     def interpretacija_bf(self, bf):
36         """Interpretira Bayesov faktor prema Jeffreys skali."""
37         if bf < 1:
38             return "Dokaz protiv H1"
39         elif bf < 3:
40             return "Slab dokaz za H1"
41         elif bf < 10:
42             return "Umjeren dokaz za H1"
43         elif bf < 100:
44             return "Jak dokaz za H1"
45         else:
46             return "Odlučujući dokaz za H1"
47
48     # Demonstracija
49     print("Occamova oštrica kroz Bayesov faktor")
50     print("=="*37)
51     print("\nScenarij: Objašnjenje niza brojeva [2, 4, 6, 8, 10]\n")
52
53     oo = OccamovaOstrica()
54
55     # Dvije hipoteze različite složenosti
56     print("HIPOTEZE:")
57     print("  H1 (jednostavna): 'Parni brojevi do 10'")
58     print("    Parametri: 1 (samo parnost)")
59     oo.dodaj_hipotezu("H1_jednostavna", kompleksnost=1, prior=0.67)
60
61     print("    ")
62     print("  H2 (složena): 'Brojevi koji zadovoljavaju x2-12x+20<0 ili x=2k, k∈N'")
63     print("    Parametri: 5 (polinomski koeficijenti + parnost)")
64     oo.dodaj_hipotezu("H2_slozena", kompleksnost=5, prior=0.33)
65
66     print("\nPRIORNE VJEROJATNOSTI (Occamov princip):")
67     print(f"  P(H1) = {oo.hipoteze['H1_jednostavna']['prior']:.2f} (preferiramo jednostavnost)")
68     print(f"  P(H2) = {oo.hipoteze['H2_slozena']['prior']:.2f} (penaliziramo složenost)")
69
70     prior_omjer = oo.hipoteze['H1_jednostavna']['prior'] / oo.hipoteze['H2_slozena']['prior']
71     print(f"  \n  Prior omjer: P(H1)/P(H2) = {prior_omjer:.2f}")
72
73     # Test predviđanja
74     print("\nTEST 1: Predviđanje sljedećeg broja")
75     print("  H1 predviđa: 12 (sljedeći parni)")
76     print("  H2 predviđa: 12 ili 7.3 (fleksibilnija)")
77     print("  \n  Opažanje: 12")
78
79     # Likelihoods
80     lik_h1 = 1.0 # H1 savršeno predviđa 12

```

```

81 lik_h2 = 0.5 # H2 daje 50% šanse za 12
82
83 print(f" P(12|H1) = {lik_h1:.2f} (savršeno predviđanje)")
84 print(f" P(12|H2) = {lik_h2:.2f} (jedan od mogućih)")
85
86 bf_rezultat = oo.bayesov_faktor("H1_jednostavna", "H2_slozena", lik_h1, lik_h2)
87 print(f" \n Likelihood omjer: {bf_rezultat['likelihood_omjer']:.2f}")
88 print(f" Bayesov faktor: BF12 = {bf_rezultat['likelihood_omjer']:.2f} × {prior_omjer:.2f} =
↪ {bf_rezultat['bayesov_faktor']:.2f}")
89 print(f" \n Interpretacija: Dokazi {bf_rezultat['bayesov_faktor']:.0f}:1 u korist H1")
90
91 # Drugi test
92 print("\nTEST 2: Još jedno predviđanje")
93 print(" Opažanje: 14")
94 print(f" P(14|H1) = 1.00")
95 print(f" P(14|H2) = 0.50")
96
97 # Kumulativni BF
98 kumulativni_bf = bf_rezultat['bayesov_faktor'] * 2 # još jedan faktor 2
99 print(f" \n Kumulativni BF12 = {kumulativni_bf:.2f}")
100 print(f" \n Interpretacija: Dokazi {kumulativni_bf:.0f}:1 u korist H1")
101
102 # Filozofska analiza
103 print("\nFILOZOFSKA ANALIZA:")
104 print("=*20)
105 print("\nZašto Bayes preferira jednostavnost?\n")
106
107 print("1. PRIOR KOMPONENTA:")
108 print(" Jednostavnije hipoteze su a priori vjerovatnije")
109 print(" (manje parametara = veća gustoća vjerojatnosti)")
110
111 print("\n2. LIKELIHOOD KOMPONENTA:")
112 print(" Složene hipoteze 'razmazuju' vjerojatnost")
113 print(" na više mogućnosti → niži likelihood po ishodu")
114
115 print("\n3. AUTOMATSKA PENALIZACIJA:")
116 print(" Prefleksibilne teorije se same kažnjavaju")
117 print(" jer mogu objasniti previše → slabo predviđaju")
118
119 print("\nJEFFREYS-OVA SKALA za interpretaciju BF:")
120 skala = [
121     ("BF < 1", "Dokaz protiv H1"),
122     ("1 < BF < 3", "Slab dokaz za H1"),
123     ("3 < BF < 10", "Umjeren dokaz za H1"),
124     ("BF > 10", "Jak dokaz za H1"),
125     ("BF > 100", "Odlučujući dokaz za H1")
126 ]
127 for raspon, opis in skala:
128     print(f" {raspon:11}: {opis}")
129
130 print(f"\nNaš slučaj: BF = {kumulativni_bf:.2f} → {oo.interpretacija_bf(kumulativni_bf)}")
131
132 print("\n> \nPriroda je jednostavna i ne umnožava uzroke bez potrebe\" - Newton")

```

```
133 print("> Bayesov faktor to kvantificira!")
```

Output

Occamova oštrica kroz Bayesov faktor

=====

Scenarij: Objašnjenje niza brojeva [2, 4, 6, 8, 10]

HIPOTEZE:

H_1 (jednostavna): 'Parni brojevi do 10'
Parametri: 1 (samo parnost)

H_2 (složena): 'Brojevi koji zadovoljavaju $x^2 - 12x + 20 < 0$ ili $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ '
Parametri: 5 (polinomski koeficijenti + parnost)

PRIORNE VJEROJATNOSTI (Occamov princip):

$P(H_1) = 0.67$ (preferiramo jednostavnost)
 $P(H_2) = 0.33$ (penaliziramo složenost)

Prior omjer: $P(H_1)/P(H_2) = 2.03$

TEST 1: Predviđanje sljedećeg broja

H_1 predviđa: 12 (sljedeći parni)
 H_2 predviđa: 12 ili 7.3 (fleksibilnija)

Opažanje: 12
 $P(12|H_1) = 1.00$ (savršeno predviđanje)
 $P(12|H_2) = 0.50$ (jedan od mogućih)

Likelihood omjer: 2.00
Bayesov faktor: $BF_{12} = 2.00 \times 2.03 = 4.06$

Interpretacija: Dokazi 4:1 u korist H_1

TEST 2: Još jedno predviđanje

Opažanje: 14
 $P(14|H_1) = 1.00$
 $P(14|H_2) = 0.50$

Kumulativni $BF_{12} = 8.12$

Interpretacija: Dokazi 8:1 u korist H_1

FILOZOFSKA ANALIZA:

=====

Zašto Bayes preferira jednostavnost?

1. PRIOR KOMPONENTA:

Jednostavnije hipoteze su a priori vjerovatnije
(manje parametara = veća gustoća vjerojatnosti)

2. LIKELIHOOD KOMPONENTA:

Složene hipoteze 'razmazuju' vjerojatnost
na više mogućnosti → niži likelihood po ishodu

3. AUTOMATSKA PENALIZACIJA:

Prefleksibilne teorije se same kažnjavaju
jer mogu objasniti previše → slabo predviđaju

JEFFREYS-OVA SKALA za interpretaciju BF:

BF < 1 : Dokaz protiv H_1
1 < BF < 3 : Slab dokaz za H_1
3 < BF < 10: Umjeren dokaz za H_1
BF > 10 : Jak dokaz za H_1
BF > 100 : Odlučujući dokaz za H_1

Naš slučaj: BF = 8.12 → Umjeren dokaz za H_1

> "Priroda je jednostavna i ne umnožava uzroke bez potrebe" - Newton
> Bayesov faktor to kvantificira!

8.1.7 Koherentnost i Dutch Book argument

Dutch Book teorem: Ako vaša vjerovanja krše aksiome vjerojatnosti, netko može konstruirati niz oklada gdje sigurno gubite novac.

Ovo daje **pragmatičko opravdanje** Bayesovog pristupa - nekoherentna vjerovanja vode u sigurni gubitak!

```

1 class DutchBook:
2     """Demonstrira Dutch Book argument protiv nekoherentnih vjerovanja."""
3
4     def __init__(self, vjerovanja):
5         """
6         vjerovanja: dict s vjerojatnostima za različite sudove
7         """
8         self.vjerovanja = vjerovanja
9
10    def provjeri_koherentnost(self):
11        """Provjerava krše li vjerovanja aksiome vjerojatnosti."""
12        problemi = []
13
14        # Provjeri nenegativnost
15        for sud, p in self.vjerovanja.items():
16            if p < 0 or p > 1:
17                problemi.append(f"{sud}: P={p} nije u [0,1]")

```

```

18
19     # Provjeri aditivnost za disjunkciju (ako postoji)
20     if 'A' in self.vjerovanja and 'B' in self.vjerovanja and 'A_ili_B' in
    ↪ self.vjerovanja:
21         p_a = self.vjerovanja['A']
22         p_b = self.vjerovanja['B']
23         p_a_ili_b = self.vjerovanja['A_ili_B']
24
25         #  $P(A \vee B) \leq P(A) + P(B)$ 
26         if p_a_ili_b > p_a + p_b:
27             problemi.append(f"P(A∨B)={p_a_ili_b} > P(A)+P(B)={p_a+p_b}")
28
29         #  $P(A \vee B) \geq \max(P(A), P(B))$ 
30         if p_a_ili_b < max(p_a, p_b):
31             problemi.append(f"P(A∨B)={p_a_ili_b} < max(P(A),P(B))={max(p_a, p_b)}")
32
33     return len(problemi) == 0, problemi
34
35 def konstruiraj_dutch_book(self):
36     """Konstruira skup oklada koji garantira gubitak."""
37     if 'A' not in self.vjerovanja or 'B' not in self.vjerovanja or 'A_ili_B' not in
    ↪ self.vjerovanja:
38         return None
39
40     p_a = self.vjerovanja['A']
41     p_b = self.vjerovanja['B']
42     p_a_ili_b = self.vjerovanja['A_ili_B']
43
44     oklade = []
45
46     # Oklada 1: Kladi se na A po "fer" cijeni
47     oklade.append({
48         'tip': 'ZA',
49         'sud': 'A',
50         'cijena': p_a * 100,
51         'isplata': 100
52     })
53
54     # Oklada 2: Kladi se na B po "fer" cijeni
55     oklade.append({
56         'tip': 'ZA',
57         'sud': 'B',
58         'cijena': p_b * 100,
59         'isplata': 100
60     })
61
62     # Oklada 3: Kladi se PROTIV (A ili B)
63     oklade.append({
64         'tip': 'PROTIV',
65         'sud': 'A_ili_B',
66         'prima': p_a_ili_b * 100,
67         'placa_ako_istina': 100
68     })

```



```

69
70     return oklade
71
72 # Demonstracija
73 print("Dutch Book Argument - Cijena nekoherentnosti")
74 print("="*46)
75
76 # Nekoherentan agent
77 nekoherentan = DutchBook({
78     'A': 0.6,
79     'B': 0.5,
80     'A_ili_B': 0.7 # Prekršaj! Trebalo bi biti barem 0.6
81 })
82
83 print("\nAGENT 1: Nekoherentan")
84 print("Vjerovanja:")
85 for sud, p in nekoherentan.vjerovanja.items():
86     simbol = "√" if "ili" in sud else ""
87     prikaz = sud.replace("_ili_", " ∨ ")
88     print(f" P({prikaz}) = {p:.2f}", end="")
89     if sud == 'A_ili_B':
90         print(" KRŠI AKSIOME!")
91     else:
92         print()
93
94 koherentan_min = max(nekoherentan.vjerovanja['A'], nekoherentan.vjerovanja['B'])
95 koherentan_max = min(1.0, nekoherentan.vjerovanja['A'] + nekoherentan.vjerovanja['B'])
96 print(f" \n Trebalo bi biti:  $P(A \vee B) \geq \max\{\text{nekoherentan.vjerovanja['A']:.2f},$ 
97     ↪  $\{\text{nekoherentan.vjerovanja['B']:.2f}\} = \{\text{koherentan\_min:.2f}\}$ ")
98 print(f" i  $P(A \vee B) \leq \{\text{nekoherentan.vjerovanja['A']:.2f} +$ 
99     ↪  $\{\text{nekoherentan.vjerovanja['B']:.2f}\} = \{\text{nekoherentan.vjerovanja['A'] +$ 
100     ↪  $\text{nekoherentan.vjerovanja['B']:.2f}\}$  (ali  $\leq 1$ )")
101 print(f" Koherentan raspon: [{koherentan_min:.2f}, {koherentan_max:.2f}]")
102
103 # Koherentan agent
104 koherentan = DutchBook({
105     'A': 0.6,
106     'B': 0.5,
107     'A_ili_B': 0.8 # Koherentno!
108 })
109
110 print("\nAGENT 2: Koherentan")
111 print("Vjerovanja:")
112 for sud, p in koherentan.vjerovanja.items():
113     prikaz = sud.replace("_ili_", " ∨ ")
114     print(f" P({prikaz}) = {p:.2f}", end="")
115     if sud == 'A_ili_B':
116         print(" ✓ Zadovoljava aksiome")
117     else:
118         print()
119
120 # Konstruiraj Dutch Book
121 print("\nDUTCH BOOK PROTIV NEKOHERENTNOG AGENTA:")

```

```

119 print("="*41)
120
121 oklade = nekoherentan.konstruiraj_dutch_book()
122 print("\nKladioničar konstruira sljedeće oklade:\n")
123
124 for i, oklada in enumerate(oklade, 1):
125     if oklada['tip'] == 'ZA':
126         print(f"Oklada {i}: Agent se kladi ZA '{oklada['sud']}'")
127         print(f"  Fer cijena (prema agentu): {oklada['cijena']:.1f}€")
128         print(f"  Dobitak ako {oklada['sud']}: {oklada['isplata']}€, Gubitak ako
↳   -{oklada['sud']}: -{oklada['cijena']:.0f}€")
129     else:
130         prikaz = oklada['sud'].replace("_ili_", " ∨ ")
131         print(f"Oklada {i}: Agent se kladi PROTIV '{prikaz}'")
132         print(f"  Agent prima: {oklada['prima']:.1f}€")
133         print(f"  Mora platiti {oklada['placa_ako_istina']}€ ako {prikaz}")
134     print()
135
136 # Analiza ishoda
137 print("ANALIZA ISHODA:")
138 print("="*16)
139 print("\nMogući ishodi:")
140
141 ishodi = [
142     ("A∧B", True, True),
143     ("A∧¬B", True, False),
144     ("¬A∧B", False, True),
145     ("¬A∧¬B", False, False)
146 ]
147
148 for naziv, a_istina, b_istina in ishodi:
149     profit = 0
150     detalji = []
151
152     # Oklada 1 (na A)
153     if a_istina:
154         profit += 100 - oklade[0]['cijena']
155         detalji.append("+100")
156     else:
157         profit -= oklade[0]['cijena']
158         detalji.append(f"-{oklade[0]['cijena']:.0f}")
159
160     # Oklada 2 (na B)
161     if b_istina:
162         profit += 100 - oklade[1]['cijena']
163         detalji.append("+100")
164     else:
165         profit -= oklade[1]['cijena']
166         detalji.append(f"-{oklade[1]['cijena']:.0f}")
167
168     # Oklada 3 (protiv A ili B)
169     if a_istina or b_istina:
170         profit += oklade[2]['prima'] - 100

```

```

171     detalji.append("-100")
172     else:
173         profit += oklade[2]['prima']
174         detalji.append("+0")
175
176     print(f"   {naziv:8} {' '.join(detalji):15} = {profit:+.0f}€ → Agent {'gubi' if profit <
    ↪ 0 else 'dobiva'} {abs(profit):.0f}€")
177
178 print("\nAgent UVIJEK gubi novac! (Dutch Book)")
179
180 # Pokušaj protiv koherentnog
181 print("\nPOKUŠAJ PROTIV KOHERENTNOG AGENTA:")
182 print("="*36)
183 print("\nIste oklade s koherentnim agentom:")
184 print(f"   Oklada 3 sada: Agent prima {koherentan.vjerovanja['A_ili_B']*100:.0f}€ (ne 70€)")
185
186 print("\nMogući ishodi:")
187 for naziv, a_istina, b_istina in ishodi[:2]: # Samo neki ishodi za kračću
188     profit = 0
189     detalji = []
190
191     if a_istina:
192         profit += 100 - 60
193         detalji.append("+100")
194     else:
195         profit -= 60
196         detalji.append("-60")
197
198     if b_istina:
199         profit += 100 - 50
200         detalji.append("+100")
201     else:
202         profit -= 50
203         detalji.append("-50")
204
205     if a_istina or b_istina:
206         profit += 80 - 100
207         detalji.append("-100")
208     else:
209         profit += 0
210         detalji.append("+0")
211
212     print(f"   {naziv:8} {' '.join(detalji):15} = {profit:+.0f}€")
213
214 print("\nKoherentan agent može i dobiti i izgubiti.")
215 print("Nema sigurnog gubitka!")
216
217 print("\nEPISTEMOLOŠKA PORUKA:")
218 print("="*22)
219 print("• Nekoherentna vjerovanja vode u sigurni gubitak")
220 print("• Racionalnost zahtijeva poštivanje aksioma vjerojatnosti")
221 print("• Bayesov pristup garantira koherentnost")
222 print("• Pragmatičko opravdanje epistemologije!")

```

```
223 print("\n> \"Koherentnost nije sve, ali bez nje sve je ništa\" - de Finetti")
```

Output

Dutch Book Argument - Cijena nekoherentnosti

=====

AGENT 1: Nekoherentan

Vjerovanja:

$$P(A) = 0.60$$

$$P(B) = 0.50$$

$$P(A \vee B) = 0.70 \text{ KRŠI AKSIOME!}$$

$$\text{Trebalo bi biti: } P(A \vee B) \geq \max(0.60, 0.50) = 0.60$$

$$\text{i } P(A \vee B) \leq 0.60 + 0.50 = 1.10 \text{ (ali } \leq 1)$$

$$\text{Koherentan raspon: } [0.60, 1.00]$$

AGENT 2: Koherentan

Vjerovanja:

$$P(A) = 0.60$$

$$P(B) = 0.50$$

$$P(A \vee B) = 0.80 \quad \checkmark \text{ Zadovoljava aksiome}$$

DUTCH BOOK PROTIV NEKOHERENTNOG AGENTA:

=====

Kladioničar konstruira sljedeće oklade:

Oklada 1: Agent se kladi ZA 'A'

Fer cijena (prema agentu): 60.0€

Dobitak ako A: 100€, Gubitak ako $\neg A$: -60€

Oklada 2: Agent se kladi ZA 'B'

Fer cijena (prema agentu): 50.0€

Dobitak ako B: 100€, Gubitak ako $\neg B$: -50€

Oklada 3: Agent se kladi PROTIV 'A $\vee$ B'

Agent prima: 70.0€

Mora platiti 100€ ako A $\vee$ B

ANALIZA ISHODA:

=====

Mogući ishodi:

$$A \wedge B \quad +100 \ +100 \ -100 \quad = +60\text{€} \quad \rightarrow \text{Agent dobiva 60€}$$

$$A \wedge \neg B \quad +100 \ -50 \ -100 \quad = -40\text{€} \quad \rightarrow \text{Agent gubi 40€}$$

$$\neg A \wedge B \quad -60 \ +100 \ -100 \quad = -40\text{€} \quad \rightarrow \text{Agent gubi 40€}$$

$$\neg A \wedge \neg B \quad -60 \ -50 \ +0 \quad = -40\text{€} \quad \rightarrow \text{Agent gubi 40€}$$

Agent UVIJEK gubi novac! (Dutch Book)

POKUŠAJ PROTIV KOHERENTNOG AGENTA:

=====

Iste oklade s koherentnim agentom:

Oklada 3 sada: Agent prima 80€ (ne 70€)

Mogući ishodi:

$A \wedge B$	+100	+100	-100	= +70€
$\neg A \wedge B$	-60	+100	-100	= -30€

Koherentan agent može i dobiti i izgubiti.

Nema sigurnog gubitka!

EPISTEMOLOŠKA PORUKA:

=====

- Nekoherentna vjerovanja vode u sigurni gubitak
- Racionalnost zahtijeva poštivanje aksioma vjerojatnosti
- Bayesov pristup garantira koherentnost
- Pragmatičko opravdanje epistemologije!

> "Koherentnost nije sve, ali bez nje sve je ništa" - de Finetti

8.1.8 Prijedlozi za daljnje istraživanje

Za produbljivanje razumijevanja Bayesove epistemologije kroz praktične zadatke:

Goodmanov paradoks (grue/bleen)

Implementirajte problem "zeleno-plavih" smaragda. Pokažite kako različiti priori o prirodnim/neprirodnim predikatima utječu na induktivno zaključivanje.

Problem starih dokaza

Simulirajte situaciju gdje teorija objašnjava već poznate činjenice. Kako Bayesov pristup tretira dokaze koje znamo prije teorije?

Quine-Duhemova teza

Pokažite kako se negativan eksperiment može pripisati različitim hipotezama u teorijskoj mreži. Implementirajte Bayesovo ažuriranje za mrežu povezanih hipoteza.

Sleeping Beauty problem

Implementirajte ovaj paradoks samolociranja. Analizirajte sukob između "halfer" i "thirder" pozicija kroz Bayesov okvir.

Kuhnove znanstvene revolucije

Modelirajte promjenu paradigme kao nagli skok u posteriornim vjerojatnostima. Kada akumulirani dokazi dovode do "revolucije"?

Solomonoffova indukcija

Implementirajte univerzalnu indukciju koristeći Kolmogorovljevu složenost kao prior. Pokažite kako kraći opisi imaju veću apriornu vjerojatnost.

Akaike informacijski kriterij

Usporedite AIC s Bayesovim faktorom za selekciju modela. Pokažite trade-off između složenosti i točnosti.

Epistemička logika

Implementirajte modalne operatore znanja i vjerovanja. Pokažite kako se Bayesovo ažuriranje uklapa u formalnu epistemologiju.

Kauzalno zaključivanje

Implementirajte Pearl-ove do-operatore. Pokažite razliku između opažajne i intervencijske evidencije.

Socijalna epistemologija

Simulirajte mrežu agenata koji dijele dokaze. Istražite kako se konsenzus formira kroz Bayesovo ažuriranje.

Svaki zadatak istražuje dublje veze između vjerojatnosti, znanja i racionalnog zaključivanja.

8.1.9 Zaključak

Kroz ovu implementaciju istražili smo kako Bayesov teorem revolucionira naše razumijevanje znanja i znanosti:

1. **Znanje kao stupnjevito vjerovanje** - ne binarna istina
2. **Učenje kao ažuriranje** - ne zamjena vjerovanja
3. **Racionalnost kao koherentnost** - pragmatičko opravdanje
4. **Znanost kao konvergencija** - različiti putovi do istine

Bayesov pristup mijenja fundamentalna epistemološka pitanja:

"Pitanje nije 'Što je istina?' već 'Koliko trebam vjerovati?'" - E.T. Jaynes

Ova promjena perspektive ima duboke implikacije:

- **Filozofija znanosti:** Od falsifikacije do stupnjeva potvrde
- **Epistemologija:** Od JTB (justified true belief) do racionalnog ažuriranja
- **Racionalnost:** Od logičke dedukcije do vjerojatnosnog zaključivanja

Kroz praktično programiranje otkrivamo da Bayesov teorem nije samo matematička formula, već **normativna teorija racionalnog vjerovanja** - pokazuje kako bi racionalni agent trebao mijenjati svoja uvjerenja suočen s dokazima.

"Bayesov teorem je za neizvjesnost ono što je aritmetika za brojanje" - John Maynard Keynes

U svijetu nesavršenog znanja i nepotpunih informacija, Bayesova epistemologija nudi rigorozan okvir za navigiranje kroz neizvjesnost - ne obećava istinu, ali garantira racionalnost.